aventi i vertici in una linea qualsivoglia, gli assi diretti secondo le tangenti a questa linea, e i rispettivi angoli al vertice variabili da cono a cono secondo una legge qualsivoglia, contengono un sistema particolare di geodetiche (sviluppoidi della linea anzi-detta), la cui ricerca non dipende che dalla integrazione di una equazione alle derivate ordinarie del prim' ordine fra due variabili, anzi, quando la linea è piana, da una semplice quadratura.

Si ha di ciò un esempio interessante nel caso delle superficie di second'ordine.

È noto *) che la superficie conica avente il vertice in un punto dello spazio ed involvente una superficie dell'ordine *n ,* è in generale dell'ordine *n (n* — i). Quando *n* = 2, il cono involvente è adunque un cono di second'ordine (MONGE). Cerchiamo se questo còno possa, in certe particolari circostanze, ridursi ad un cono retto, cerchiamo cioè se una superficie di second'ordine possa essere il luogo geometrico delle sviluppoidi d'una linea tracciata nello spazio.

Sia

*a oc*[2] ~|~ *by*[2] -{- *c* ^ = *i*

l'equazione della superficie di second'ordine, e sieno *p, q, r* le coordinate della trajet-toria. Il cono avente il vertice nel punto (/?, *q,* r) ed involvente questa superficie è rappresentato, come facilmente si può verificare, dall'equazione

— *2bcqr(j* — ?)Ct— r) — *2carp*^ — /•)(> — />) — *zabpq(x* — *p)(y* — *q)* = o,

in cui *b*[2] =• *ap*[2] -j- *b* <*f* -|- *cr* [2] — i ; d'altra parte, il cono retto che ha il vertice nel punto (p, *q,* r) e l'asse diretto secondo la tangente alla trajettoria o rappresentato, come pocanzi si è veduto, dalla

(V[2] cos[2] u — p'[2]) (x — *p)*[2] + (V[2] cos[2] 6j — ?'[2]) (j — *q)*[2] -j- *(e'*[2] cos[2] w — r'[2]) (^ — r)' - *2q'r'(y - q}* (^ - r) - *zr'p'fr* - r) (* - /») — *2p'q'(x* - *fi(y* - (?) = O.

Dunque, affinchè possa esistere una trajettoria, le equazioni dei due coni debbono potersi identificare fra loro, ossia , indicando con *k* una indeterminata , debbono essere soddisfatte le seguenti condizioni :

*aQf* _ *ap*) = k* (V[2] cos[2] co — /[2]) , *bcqr = kq'r'*9

£(// _ *b*q^ = /c((7'[2]cos[2]o^ — y'a), *carp = kr'p*f,

c*(ìf— cr*[2]*}* = /e(V[2]cos[2]G> — r[f2]) ,

*) SALMON, *A Treatise on thè analytic Geomctry of three dimensions,* Dublin, 1862, pag. 190. Citiamo con piacere questo libro, or ora pubblicato dal dotto e benemerito geometra irlandese, per chiamare sovr'esso l'attenzione degli studiosi.